Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Propuesta para la introducción al concepto de derivada de una función

A proposal for the introduction to the concept of derivative of a function

Autor:

Héctor Giménez Calvo

Directora:

Dra. Alejandra Sarina Córdova Martínez

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Noviembre 2020

Contenidos

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realiza una propuesta para introducir el concepto de derivada de una función en un punto, inmerso en el currículo de la asignatura de Matemáticas I del curso de primero de Bachillerato en la modalidad de Ciencias. La propuesta, ideada por un graduado en física y aspirante a profesor de matemáticas, se presenta como Trabajo de Fin del Máster de Profesorado de Secundaria de la modalidad de Matemáticas.

El trabajo se enmarca en el contexto (seguramente histórico) de la pandemia vivida en el 2020, que obligó a suspender las clases presenciales sustituyéndolas por la docencia a distancia. Dicha circunstancia afectó también al periodo de *prácticum* lo que impidió que se pudiera poner en práctica todas las ideas que existían en la cabeza del autor, teniendo que acomodarse las tareas a las necesidades del centro, del tutor de prácticas y, sobre todo, del alumnado.

El trabajo comienza con un análisis del objeto matemático en el contexto legislativo y educativo actual, para lo cual se hará uso de tres libros de texto de reciente edición: dos de ellos en edición digital (*Editex* y *Anaya*) y el otro restante en formato físico (SM).

A. DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

A.1. Objeto matemático y el contexto educativo

El objeto matemático que se aborda en este trabajo es, como ya se ha mencionado en la introducción, el de la derivada, desde el punto de vista de introducción al concepto. En el contexto educativo del bachillerato, se utiliza la palabra derivada para referirse indistintamente a dos conceptos que son distintos. Por un lado se encuentra el concepto de **derivada de una función f en un punto a** (**f'(a)**) y por otro lado el de **función derivada** (**f'(x)**) con **x** como variable independiente. En esta propuesta se tratará, en mayor medida, de que el alumnado comprenda el primer concepto con el mayor nivel de profundidad posible, para después abordar el segundo, tratando de eludir la usual metodología de memorización de tablas que, si bien puede resultar de utilidad a la hora de superar pruebas de evaluación de ejercicios de tipo algorítmico, de poco sirve para ayudar a comprender los nuevos conceptos que vendrán en etapas educativas superiores. Por no extender demasiado este trabajo y para no superar, por tanto, los límites impuestos, no se abordarán los contenidos referentes a las aplicaciones de la derivada, como son por ejemplo: hallar máximos y mínimos de una función, estudio de la curvatura, representación completa de funciones, problemas de optimización, etc.

Para situar la introducción a la derivada en el contexto educativo del primer curso de Bachillerato de la modalidad de ciencias, debemos atender al currículo contemplado en la **ORDEN ECD/494/2016**, de 26 de mayo, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón que aparece en el BOA de 03/06/16. En el bloque de análisis, relacionados con la introducción a la derivada, se pueden encontrar los siguientes **contenidos**:

- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
- Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

  En cuanto a los **criterios** y **estándares de aprendizaje** tenemos:

  - **Crit.MA.3.3**: Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
  - **Est.MA.3.3.1**: Calcula la derivada de una función, usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
  - **Est.MA.3.3.2**: Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.
  - **Est.MA.3.3.3**: Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

A.2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático

Como ya se ha mencionado en los párrafos anteriores, la asignatura y curso en que se sumerge la presente propuesta es **Matemáticas I** del curso de **1º de Bachillerato** de la modalidad de **ciencias**.

A.3. Praxeología asociada al objeto matemático

La palabra *praxeología* se forma por la composición de dos raíces: en primer lugar la *praxis,* que se refiere a la práctica, en oposición a la teoría o teórica, significantes del *logos* en segundo lugar. En cuanto a la *praxis* asociada al concepto de derivada, encontramos los **campos de problemas** y las **técnicas** utilizadas para resolverlos. Dentro de *logos* hallaríamos las **tecnologías** que justifican el uso de las técnicas y también, aunque no se tengan en cuenta en este trabajo, se hallaría la teoría que da la razón de ser a las tecnologías.

Los **campos de problemas** de la propuesta serán los siguientes:

I. Cálculo de la tasa de variación media (o velocidad media).

   I.a. A partir de una tabla de valores.

   I.b. A partir de un gráfico.

   I.c. A partir de la expresión.

II. Cálculo de tasa de variación instantánea (o velocidad instantánea).

   II.a. Por aproximación tomando amplitudes cada vez menores.

   II.b. Usando la definición con el límite.

III. Cálculo de la pendiente de una función (derivada en un punto).

IV. Hallar la función derivada de funciones sencillas mediante la definición.

V. Problemas de relacionar la gráfica de la función derivada con la gráfica de una función.

En cuanto a las **técnicas** utilizadas, para dotar de significado a la derivada y apoyar así su razón de ser de obtención de pendientes, deben sustentarse sobre todo en las representaciones gráficas de las funciones. Pero todo ello sin olvidar las técnicas algebraicas y resolución de límites ya estudiados en los temas anteriores, dotando, a su vez, a los límites de (una) razón de ser y huyendo así, por el contrario, de la idea de que la resolución del límite es el fin último de derivada.

En el caso concreto de hallar la ecuación de la recta tangente, se evitará el uso de la ecuación punto-pendiente en la forma que se suele dar en los libros de texto, ya que invita a su memorización a corto plazo para ser olvidada tras realizar el examen. El uso de la ecuación de la recta en su forma explícita (y=mx+n) parece más apropiado, pues los parámetros **m** y **n** poseen un significado intuitivo desde el punto de vista de la representación gráfica y por ello es una ecuación que suele permanecer más tiempo en la memoria de los alumnos. Además **m** se encuentra directamente relacionado con la derivada.

Para justificar todas las técnicas utilizadas, se necesitará el conocimiento de las siguientes **tecnologías**:

- Representación gráfica de una función
- Ecuación de la recta (para el cálculo de rectas tangentes).
- Definición de derivada de una función en un punto.
- Definición de pendiente de una función.
- Definición de recta tangente.
- Definición de función derivada de otra función.

B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

B.1. Justificación de la introducción escolar del concepto de derivada

Para analizar el estado de enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada, se han analizado los contenidos de tres libros de texto de uso extendido y de reciente edición. En primer lugar la edición digital del libro de ANAYA (2015) a la que se ha tenido acceso mediante las prácticas realizadas por el autor del presente trabajo en el *IES Pablo Serrano* ya que, aunque no haya sido utilizado para los cursos de bachillerato, es la editorial que se emplea en el instituto para los cursos de secundaria. En segundo lugar se analiza una edición en formato físico del libro de SM (2015) bastante conocido por el autor del presente trabajo, pues fue la utilizada por un alumno de clases particulares al que viene apoyando desde hace muchos años y conoce bien. Por último, la edición digital del libro de EDITEX (2015) proporcionada por el tutor de prácticas del instituto *Pablo Serrano* por ser el libro empleado por éste durante el actual curso de bachillerato.

B.1.i. Libro de ANAYA

El primer libro a analizar será: Matemáticas I. Bachillerato. Anaya + Digital de José Colera Jiménez; María José Oliveira González; Elizabeth Santaella Fernández; Ramón Colera Cañas (2015). En adelante se referirá a este libro como **ANAYA**. En este libro de texto, el tema que nos ocupa es el número 12: Derivadas. Con la introducción y los problemas propuestos, este tema tiene una extensión de 33 páginas.

El capítulo comienza con una introducción histórica en la que se menciona, muy brevemente, a Newton y Leibnitz como inventores (de forma independiente) del concepto y a Euler, de forma tangencial, como un importante contribuidor. Después se menciona a Cauchy como artífice del formalismo moderno al relacionar el concepto de derivada con el de límite. Posteriormente se alude a la necesidad de la creación del concepto con la siguiente frase: "Las matemáticas lo estaban pidiendo para resolver, además de problemas de **tangentes en un punto** y **velocidades instantáneas**, otras muchas situaciones, como los complicados problemas astronómicos que habían surgido con la invención del telescopio."

Las páginas de introducción concluyen con un problema propuesto sobre cálculo de velocidades medias a partir de la imagen de un objeto al que se le han realizado fotografías en intervalos de tiempo regulares. Por tanto, la primera justificación que se le plantea al alumno se refiere al cálculo de velocidades.

El primer epígrafe del tema versa sobre la *Medida del crecimiento de una función*. Comienza directamente con la definición y su expresión, dentro del típico recuadro resaltado, de la **Tasa de Variación Media** (**TVM**) de una función en un intervalo [a,b]. También se define una función como **creciente** (o **decreciente**) en dicho intervalo si la TVM es positiva (o negativa). Una vez fuera del recuadro, para ir introduciendo a la fórmula completa de la derivada con el límite pero sin justificar de ningún otro modo, se menciona que el intervalo sobre el que se calcula la TVM se suele designar como [a,a+h] y se muestra la correspondiente expresión. Seguidamente se presentan dos ejercicios resueltos: uno en el que se calcula la TVM de una función dada en los intervalos [1,2] , [1,3] , [1,4] y [1,5] usando la primera fórmula y otro en el que se halla la expresión de la TVM en un intervalo de longitud variable [1,1+h], mostrando así que se obtienen los mismos valores que antes si $h = 1, 2, 3$ y 4. Finalmente se proponen dos ejercicios similares a los resueltos. En la siguiente página encontramos la primera definición de **derivada** en un punto. La justificación se realiza a partir de una pregunta: "*¿cómo se mide el crecimiento de una función en un punto?"* La respuesta simplemente se hace realizando la conexión directa entre derivada en un punto con la **pendiente** de la recta tangente en dicho punto. Es decir, se plantea la pendiente de la recta tangente como respuesta a una pregunta que no satisface ninguna necesidad en especial, puesto que en ningún momento se suscita la necesidad de calcular el crecimiento de una función en un punto. Tras esta vaga definición, se propone como único ejercicio hallar la pendiente de varias rectas tangentes a una función dibujadas (función y rectas) sobre una gráfica cuadriculada. Básicamente se les pide contar cuadritos sobre la gráfica, tarea que ya ha sido ejercitada en el anterior tema de geometría analítica del mismo curso, con la diferencia de que ahora se dice que eso es la derivada en el punto de tangencia.

Debido a que en la anterior definición de derivada, su cálculo se ve limitado a la imposición de tener la representación gráfica, surge entonces una necesidad cuando se carece de aquella representación: "¿Cómo hallamos la pendiente de la tangente sin necesidad de trazarla?" La pregunta y su respuesta se proporcionan en el siguiente epígrafe mediante la definición: "La **derivada de f en a** (pendiente de la recta tangente) es el límite de las pendientes de las rectas secantes" y sus correspondientes expresiones. Después, para intentar evitar que los alumnos se vean abrumados con la fórmula, se propone una regla algorítmica de cuatro pasos para su cálculo utilizando la expresión con *h*. Ésta consiste en hallar en primer lugar los elementos f(a+h) y f(a) por separado (pasos 1 y 2), plantear después la expresión del cociente completo (paso 3) y finalmente hallar el límite del cociente (paso 4). Por último, el epígrafe termina con dos ejercicios resueltos: un ejercicio primero consistente en la aplicación del algoritmo para calcular la derivada de una función en un punto dado y un segundo ejercicio donde astutamente se plantea calcular la derivada de una función en siete puntos distintos. La razón de plantear este segundo ejercicio no es ni más ni menos que la de suscitar la idea de elaborar una técnica que permita calcular de una forma eficiente la derivada de una función en muchos puntos distintos. En efecto, se trata de una perspicaz forma de introducir el concepto de función derivada.

La siguiente página del libro, se dedica a introducir la **función derivada**. Tras una definición más formal, se muestra un ejercicio resuelto que no es más que la demostración de la fórmula de la función derivada de $f(x)=\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ mediante el uso de la definición. Por último, después de tres ejercicios propuestos para practicar el uso de la definición para hallar funciones derivadas sencillas, se dedica una interesante página entera para tratar el tema de la notación, en la que se puede leer la siguiente frase que es digna de mención: "f' es el nombre de una nueva función. Df es la orden de derivar la función f y el resultado es f', es decir, Df=f' ",

En lo sucesivo, el texto utiliza la notación D[f(x)] para nombrar a la función derivada, identificándolo así como un *proceso* que se aplica sobre el *objeto* función.

A partir de aquí, el tema continúa con la exposición de la tabla de derivadas y las reglas de multiplicación, división, regla de la cadena, etc. Todo ello sin demostración alguna. Prosigue el texto con las utilidades de la derivada en las que se incluye: obtención de la pendiente de una función en un punto, obtención de puntos con pendiente determinada; en concreto puntos singulares (pendiente cero), optimización de funciones y resolución de límites mediante la regla de *L'Hopital.* Para terminar el tema explicando los pasos a realizar para la representación de funciones polinómicas y racionales. Todo lo anterior se encuentra aderezado con doce problemas tipo resueltos en los que se identifica claramente el tipo de problema.

Un aspecto llamativo de ANAYA es que, a pesar de que en la introducción se afirma que una de las razones de ser de la "invención" de la derivada fue el cálculo de velocidad instantánea, en todo el tema no se hace alusión alguna a la palabra velocidad, ni en el texto ni así como en absolutamente ninguno de los problemas propuestos. Además, de los 118 problemas propuestos al alumno al final del tema, solamente siete sitúan al problema en un contexto real y de una forma muy circunstancial, pues se plantean de la misma forma que los otros **problemas dexcontextualizados**: ofreciendo una gráfica o la expresión de la función con otro nombre (distinto de f(x)) y pidiendo hallar puntos singulares. Otra cuestión que no aparece en el capítulo es la del concepto de derivabilidad ni del de derivadas laterales. Además, el crecimiento y decrecimiento se define en la teoría únicamente en términos de la TVM, aunque sí se relaciona en los problemas resueltos con el signo de la derivada.

B.1.ii. Libro de SM

El segundo libro que se procede a analizar es el siguiente: Matemáticas I. 1º de Bachillerato. Savia. Fernando Alcaide Guindo, Joaquín Hernández Gómez, Esteban

Serrano Marugán, Jesús Fernando Barbero González (2015), en adelante **SM**. El tema dedicado al objeto de estudio es el *Tema 9: Derivadas*. Para este tema se dedican 36 páginas incluyendo la introducción y los problemas al final. Si bien es cierto que para la representación de funciones, el libro dedica el siguiente tema a detallar las claves para realizar para cada tipo de función.

El preámbulo del tema omite cualquier consideración histórica para introducir el concepto de derivada mediante la razón de ser como el cálculo de **variaciones** o también de **velocidades** desde el punto de vista físico del concepto:

> Las derivadas de funciones miden su ritmo de variación y por ello aparecen en multitud de problemas de muy diferentes campos del conocimiento. Fíjate de:
>
> - Permiten calcular las velocidades y aceleraciones de cualquier objeto que se mueva, (…)
> - La rapidez con la que se produce una reacción química (…)
> - La velocidad a la que va a crecer el nivel de agua en un embalse (…)
> - Permiten controlar los movimientos de un robot para hacer que se parezcan a los de un ser humano.
> - Las derivadas admiten una interpretación geométrica sencilla asociada con las propiedades de la recta tangente a su gráfica en cada punto. (…)

El primer epígrafe del tema que posee el título de *derivada de una función en un punto* comienza directamente con la definición de **tasa de variación media** utilizando para ello la expresión con el intervalo [a,b]. Inmediatamente después se explica, apoyándose en una gráfica, que la TVM coincide con la pendiente de la secante que corta a la función en (a,f(a)) y en (b,f(b)). Y directamente se define, sin hacer alusión al concepto de límite, la **tasa de variación instantánea** como el valor constante al que tiende la TVM, cuando la amplitud del intervalo [a,b] tiende a cero. Para aclarar un poco el tema, el texto propone un ejemplo de ejercicio resuelto. Sin embargo, el ejemplo en cuestión pide calcular la **velocidad media** en un intervalo de tiempo dado y la **velocidad instantánea** en un tiempo determinado de un coche, cuya posición en función del tiempo viene dada por su correspondiente expresión f(t). Todo ello, ya que en las definiciones anteriores se ha usado la notación f(x), tratando de crear una conexión entre los conceptos de tasa de variación (matemáticas) y velocidad (física). Así pues, la resolución del primer epígrafe hace uso de la fórmula de la velocidad media (espacio recorrido / tiempo transcurrido) igualada a la fórmula de la TVM. Sin embargo, tras una breve explicación, se resuelve el apartado de la velocidad instantánea haciendo uso (de repente, sin haberlo definido antes) del límite y (de repente también) del parámetro *h*.

Los siguientes párrafos del texto de SM se centran en tratar de resolver el problema de hallar la pendiente de la recta tangente. Para ello comienza con el cálculo de la pendiente de una recta secante, pero esta vez entre los puntos P(a,f(a)) y Q(a+h,f(a+h)). Con ayuda de un gráfico, se van dando puntos Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4, los cuales se obtienen dando valores a *h* cada vez más próximos a cero. En el gráfico se observa que las rectas secantes se aproximan cada vez más a la tangente y se define por fin la pendiente como el límite cuando *h* tiende a cero. El párrafo concluye con la frase “A este número se le llama derivada de la función f en el punto x=a”. Termina por tanto el subepígrafe con un recuadro resaltado con la definición de **derivada en un punto** usando la forma y añadiendo que si dicho valor es un número real, entonces se dice que la función es **derivable** en ese punto. También se incluye la ecuación de la recta tangente en el punto *a* como una fórmula a utilizar cuando son conocidos un punto (a,f(a)) y la derivada en dicho punto f’(a).

El epígrafe siguiente trata de las *aplicaciones de la interpretación geométrica de la derivada*. Contiene tres cuadros resaltados con los textos que se muestran a continuación y sus consecuentes ejemplos ilustrados.

> Observando la gráfica de f, se puede **saber** qué **signo** tendrá la **derivada** en cada punto.
>
> Si se conoce el valor de la derivada de una función en cada punto, se puede saber la forma de la gráfica de la función
>
> La pendiente de la tangente a la curva en un punto se calcula obteniendo un límite, la derivada. Si este límite no existe significa que no hay recta tangente en ese punto. Si los límites laterales son ambos +∞ o -∞ la tangente es vertical.

Esta página se dedica a explicar la conexión entre las expresiones de las funciones (y el valor de las derivadas) con sus representaciones gráficas, todo ello apoyándose en todo momento del concepto de pendiente de la recta tangente. También parece que trata de introducir de forma intuitiva la idea de **crecimiento y decrecimiento** de una función.

Aunque dos páginas más atrás se haya introducido ya el concepto de derivada de una función en un punto, en el siguiente epígrafe: *Derivada y continuidad. Función derivada,* se aborda el tema con un poco más de profundidad. Comienza aclarando el hecho de que la continuidad es condición necesaria pero no suficiente para la derivabilidad en un punto. Seguidamente presentan el concepto de **derivadas laterales** usando el concepto de límite lateral y por tanto, se define la derivada en un punto cuando ambos límites (por la izquierda y por la derecha) existen y son iguales. Tras la explicación de derivadas laterales, para la cual no se muestran ejercicios de ejemplo, se define en su correspondiente cuadro resaltado la **función derivada** como: "La función que a cada número **x** del dominio de **f** le asigna el número **f'(x)**, si existe, se llama **función derivada de f** o **derivada de f** y se suele representar por **f'** o **Df**".

Cabe destacar que la fórmula asociada a la anterior definición aparece fuera del cuadro resaltado en la resolución de un ejercicio de ejemplo en el que se calcula la función derivada de $f(x)=x^2$ aplicando la definición. Por otro lado, se menciona la notación ***Df*** que es la notación usada por el libro en adelante. Por último, de forma un poco desapercibida, se menciona la existencia y la posibilidad de calcular las **derivadas sucesivas**: segunda, tercera, etc., de una función.

Las páginas siguientes se dedican, de forma extensa, a explicar las **reglas** más básicas **de derivación**, como suma de funciones, producto, funciones polinómicas, etc. Cabe destacar que este libro no simplemente muestra la regla, sino que cada una viene con su correspondiente demostración utilizando la definición e incluyendo algún que otro ejemplo. El tema prosigue, dedicando una página para enunciar y demostrar la **regla de la cadena**, incluyendo el detalle de mencionar el caso de cuándo no es válida la demostración. Continúa dedicando también una página entera para la **demostración** de todas y cada una de las **derivadas de funciones elementales** en las que se incluyen: función inversa, potencial, logarítmica, exponencial, trigonométricas y hasta se incluye también la demostración de las funciones trigonométricas inversas.

Los últimos epígrafes del tema están dedicados a abordar los aspectos más enfocados a la representación de funciones. Primero se define de forma más rigurosa el **crecimiento y decrecimiento** de una función, haciendo uso del concepto de *entorno*, pero sin entrar mucho en detalle. La misma idea se utiliza para definir los **extremos relativos**. El tema concluye con dos epígrafes más: uno que trata con más detalle la forma de encontrar los extremos relativos de una función y el último sobre las aplicaciones de la segunda derivada (hallar puntos de inflexión y **curvatura**). Estos últimos epígrafes están muy enfocados a la **representación de funciones**. En este tema se han dado las ideas que relacionan las propiedades analíticas de las funciones con las propiedades de sus gráficas, pero los métodos y protocolos para representar una función dada se dan en el siguiente tema: *Funciones elementales*. Al final del tema se incluye una página resumen en la que aparecen las derivadas de las funciones elementales, de la cual cabe destacar que, al no estar en la habitual disposición de tabla, pueda resultar un poco engorrosa su consulta para un alumno.

Uno de los aspectos de este libro que cabe mencionar es que demuestran todas o casi todas las proposiciones utilizando la definición de forma rigurosa, coherente y cuidadosa (teniendo en cuenta los casos excepcionales). Sin embargo, esto puede tener el inconveniente de que obliga a ser muy necesaria la intervención del docente a la hora de hacer entender muchos conceptos, pues en muchos casos puede resultar algo abrumador para un alumno no acostumbrado a las demostraciones. En cuanto a las razones de ser del objeto, el tema comienza definiendo las tasas de variación media e instantánea para luego poner ejemplos y proponer problemas relacionados con las **velocidades**, pero pronto se observa una deriva hacia el cálculo de pendientes y hacia la representación gráfica de funciones. En cuanto a los ejercicios y problemas que se proponen en cada epígrafe, a excepción de un ejercicio de cálculo de velocidades en el primero y de dos propuestos en optimización, el resto carecen de contexto real. Es llamativo que la mayoría de los ejercicios se centran, aparte de en la manipulación algebraica, sobre todo en la representación gráfica. Al final del tema, entre ejercicios, cuestiones, problemas y problemas “para profundizar” suman 104 propuestas. De todas ellas, 28 son problemas de los cuales más de una decena se enmarcan en contextos reales de varios aspectos de las ciencias y solo uno, de optimización, relacionado con aspectos económicos.

B.1.iii. Libro de Editex

El tercer y último libro que se va a analizar es Matemáticas I de 1º de Bachillerato de Mª José Ruiz Jiménez; Jesús Llorente Medrano; Carlos González García; Ana Mª Aparicio Peñas; Fernando Arribas Ruiz (2015) de la editorial **EDITEX.** Este libro dedica dos temas, de 26 y 22 páginas respectivamente, al concepto de derivada. Se dedica por un lado la introducción al concepto en el primer tema, para exponer las aplicaciones en el segundo. Por su afinidad con la presente propuesta, el análisis se centrará en el primero de ellos, en el capítulo denominado: *Tema 13. Introducción a las derivadas.*

El tema 13 comienza en su página de presentación con una breve introducción histórica y la propuesta de unas cuestiones iniciales. La introducción atribuye el desarrollo teórico a Newton y Leibnitz mencionando su célebre disputa sobre la autoría. La invención del concepto se presenta como la respuesta a satisfacer la necesidad de resolver los problemas: el del **movimiento no uniforme** y el de encontrar la **tangente** a una curva en un punto de la misma. Como aplicación, el libro ofrece como ejemplo su utilización en la construcción de las líneas de ferrocarril o metro, de autopistas o de carreteras. Sobre las cuestiones, resulta interesante cómo, bajo la instrucción *calcula los siguientes límites*, se pide (de forma oculta) hallar una derivada en un punto y una función derivada dando para ello la expresión de la definición con límite. Otro aspecto también interesante que posee este libro es que, al principio de cada tema, muestra un mapa conceptual y una lectura recomendada, siendo la de este tema el libro *El enigma de Fermat* de Simon Signh.

Una vez que se adentra en el tema, al igual que los dos libros anteriormente analizados, EDITEX comienza con las **tasas de variación**. La principal diferencia radica en el orden de las definiciones y los ejemplos. En este caso, el libro comienza primero con los ejemplos para dar paso después a las definiciones. Además, los ejemplos tienen siempre una contextualización real, creando así la sensación de necesidad de la definición. Es también llamativo el especial esfuerzo que se hace para relacionar las tasas de variación con el concepto de velocidad, ya que la tratan tres de los cuatro ejemplos que se incluyen. Textualmente se cita: “Otras veces las tasas de variación tienen significado físico: la velocidad de un móvil es una tasa de variación.”

La extensa explicación que hace EDITEX sobre la tasa de variación instantánea, hace que el siguiente epígrafe, dedicado a la **derivada de una función en un punto**, tan solo contenga tres frases. Simplemente se define como lo mismo que la tasa de variación instantánea y se plantea la misma expresión que antes pero introduciendo la notación de Cauchy $\mathbf{D[f(x_0)]}$ para la derivada de la función f en el punto x_0, notación que se empleará en el resto del tema. Además se incluye un pequeño cuadro con las distintas notaciones utilizadas, con el detalle de incluir al célebre al que se le atribuye cada una de ellas. El resto de la página se emplea para ilustrar con tres ejemplos, ahora sí, carentes de cualquier contexto real.

Los siguientes dos epígrafes se dedican, cada uno de ellos, a las **interpretaciones física y geométrica** de la derivada. El primero de ellos aprovecha para definir velocidad media y velocidad instantánea, empleando para ello la expresión **$e(t_0)$**. En el segundo se hace uso del concepto de tangente trigonométrica para hallar la pendiente de la recta secante. A partir de ello, se define la recta tangente como la aproximación de la secante a aquella cuando el cateto contiguo (h) tiende a cero. Se demuestra por tanto que la derivada en un punto coincide con con la pendiente de la recta tangente y se relaciona con el ángulo que forma ésta con la horizontal. Concluye con las fórmulas para hallar las rectas tangente y normal a una función en un punto.

Lo siguiente en abordarse es el concepto de **función derivada** y a las **derivadas sucesivas**. El rigor y la notación utilizados por EDITEX a la hora de definir funciones es más formal que en ANAYA o SM y en general más que en los libros de cursos de bachillerato, tanto de 1º como de 2º. Es destacable también que en un cuadro al margen, se dedican unas lineas a aclarar el tema de la ambigüedad de la palabra derivada, donde se dice:

> Por comodidad en el lenguaje se suele utilizar la palabra derivada para nombrar a la **función derivada** y a la **derivada de la función en un punto**. Es el contexto el que nos indicará si derivada se refiere a una u otra acepción.

Los siguientes epígrafes del tema se destinan a dilucidar las **reglas de derivación** para operaciones de funciones y regla de la cadena en primer lugar, para luego mostrar las reglas para las funciones elementales. Para las reglas de operaciones de funciones: suma, producto y cociente, EDITEX presenta sus correspondientes demostraciones a partir de la definición. Sin embargo, es curioso que las reglas de derivación de funciones elementales no sean demostradas, dado que hasta el momento ha sido muy riguroso en todas las definiciones (en el capítulo de límites se muestra la definición con ϵ y δ). Podría pensarse que no considera adecuado mostrarlas para un nivel de primero de bachillerato, pero tampoco aparecen las demostraciones en la edición del segundo curso.

Al final del tema encontramos una tabla con todas las derivadas, dispuestas en dos columnas, una para las funciones simples (en función de *x*) y otra para las funciones compuestas. Después se hallan un par de páginas dedicadas a las nuevas tecnologías, concretamente son tres actividades para realizar con el programa *Wiris*. Finalmente concluye con una breve colección de tan solo 36 ejercicios y problemas, de entre los que se pueden contar cinco que se enmarcan en un contexto real.

B.2. Praxeologías utilizadas habitualmente

Lo que se observa de lo anterior es que, en el tema que nos ocupa, el campo de problemas suele ser muy descontextualizado. La tónica general suele ser la de mostrar una fórmula, enseñar las técnicas para usarla con un ejemplo y finalmente pedir al alumno que lo repita, cuantas más veces mejor. Esto es así para los casos de las tasas de variación, la derivada en un punto, hallar la ecuación recta tangente a una función o incluso para hallar la función derivada. Las tecnologías utilizadas son el concepto de límite para la función en un punto y las tablas de derivadas para la función derivada. En cuanto a la utilidad de los conceptos, la enseñanza habitual suele limitarse a calcular cosas que luego se van a pedir. Por ejemplo, "el signo de la derivada sirve para saber el crecimiento de una función, halla el crecimiento de esta función". En los casos como los de los problemas de hallar máximos y mínimos de una función, lo que ocurre es que los que tienen algún tipo de contexto real, normalmente la función viene dada (muchas veces en función de x) y lo único que hay que hacer es repetir la técnica de los ejercicios no contextualizados. Por otro lado, si bien es cierto que parece que todo el tema culmina con la aplicación de resolver problemas de optimización, su resolución se enfoca desde un punto de vista algorítmico, donde el estudiante debe realizar unos pasos que memoriza y le permiten resolver los problemas sin necesidad de entender en plenitud lo que está realizando.

Tabla 1

División por epígrafes de los temas dedicados a la derivada en los tres libros de texto.

ANAYA	**SM**	**EDITEX**
Tema 12: Derivadas (33 páginas)	**Tema 9:** Derivadas (36 páginas)	**Tema 13:** (26 páginas) Introducción a las derivadas
12.1 Medida del crecimiento de una función	9.1 Derivada de una función en un punto	13.1 Tasa de variación media e instantánea
12.2 Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica		13.2 Derivada de una función en un punto
-	-	13.3 Interpretación física de la derivada
(Recta tangente se da en 12.5)	9.2 Aplicaciones de la interpretación geométrica de la derivada	13.4 Interpretación geométrica de la derivada
12.3 Función derivada de otra	9.3 Derivada y continuidad. Función derivada	13.5 Función derivada. Derivadas sucesivas
12.4 Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones	9.4 Derivadas de las operaciones con funciones (I)	13.6 Derivadas de las operaciones con funciones
	9.5 Derivadas de las operaciones con funciones (II)	
	9.6 Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena	
	9.7 Derivada de la función inversa	
	9.8 Derivada de la función potencial	
	9.9 Derivada de la función logarítmica	13.7 Derivadas de las funciones elementales
	9.10 Derivada de la función exponencial	
	9.11 Derivadas de las funciones trigonométricas	
	9.12 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas	
		Tema 14: Aplicaciones de las derivadas (22 páginas)
(Crecimiento se da en 12.1 pero **sólo** con TVM)	9.13 Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos	14.1 Monotonía de una función
12.5 Utilidad de la función derivada	9.14 Extremos relativos. Problemas de optimización	14.2 Extremos relativos
		14.3 Optimización de funciones
-	9.15 Aplicaciones de la derivada segunda	14.4 Concavidad. Curvatura.
		14.5 Puntos de inflexión
12.6 Representación de funciones	**Tema 10:** Funciones elementales (30 páginas)	14.6 Representación de funciones

Son en verde, los contenidos incluidos en el currículo de 1º de Bachillerato, en naranja los que son de 2º de Bachillerato. Los contenidos están clasificados por filas y en el orden en que aparecen en cada libro.

Tabla 2

Notación empleada en los libros de texto.

NOTACIÓN		
ANAYA	**SM**	**EDITEX**
Tasa de variación media (TVM)		
$T.V.M.[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $T.V.M.[a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$TVM\ f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	$t_{vm}[x_0,x_0+h]=\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{[x_0,x_0+h]}=$ $=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Tasa de variación instantánea		
-	-	$t_{vi}[x_0]=\lim_{h\to 0} t_{vm}[x_0,x_0+h]$ $t_{vi}[x_0]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{[x_0,x_0+h]}=$ $=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Derivada de una función en un punto		
$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$D[f(x_0)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ Se mencionan todas las notaciones generalmente utilizadas
Función derivada		
$Df(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Se menciona notación **f’(x)**	(Se definen derivadas laterales) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Se menciona notación **Df**	$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to f'(x)$ $f'(x)=D[f(x)]=$ $=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Ecuación de la recta tangente		
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$	$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Notación de las fórmulas más relevantes utilizadas en los tres libros de texto: Anaya, SM y Editex.

B.3. Efectos de dicha enseñanza en el aprendizaje del alumno

Generalmente la enseñanza en este tema suele tratarse de la memorización de unas cuantas fórmulas que más tarde el alumno tendrá que utilizar en un examen. Como ya se ha comentado, este tipo de enseñanza se centra en la repetición mecánica de técnicas que, sin restarles importancia que tienen, permiten al alumno aprobar sin necesidad de entender lo que está haciendo y por qué.

Para el estudio de las dificultades y errores de los estudiantes en el ámbito de la diferenciación, se ha acudido a un artículo (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) que revisa y organiza otras investigaciones realizadas sobre la materia en cuestión. En la revisión tiene en cuenta tres factores: el conocimiento que se tiene sobre la compresión de la derivada en un punto, el papel de los sistemas de representación y las características del desarrollo del esquema de la derivada.

Una de las primeras investigaciones que se llevaron a cabo sobre errores y dificultades que tenían los estudiantes con respecto a la derivada fueron realizadas por Orton (1983). En sus estudios, Orton (1983) clasificó los errores cometidos a la hora de realizar tareas de diferenciación en tres tipos:

- **Estructurales** o **errores conceptuales, no se comprende el problema.**
- **Arbitrarios**, el alumno actúa de forma errática sin tener en cuenta los datos del problema.
- **Manipulación**, el alumno comprende los conceptos pero yerra al efectuar las técnicas.

Una conclusión que puede obtenerse de los trabajos de Orton (1983), es que hay que tener muy en cuenta, dada su importancia para la comprensión del concepto de derivada, la relación entre la razón de cambio y entre el cociente incremental.

A este respecto, los análisis de Azcárate (1990) permitieron categorizar tres conceptos a los cuales se les asociaban las dificultades y errores. Son: la pendiente de una recta, velocidad instantánea en movimiento variado y la tasa de variación instantánea de una función. Los errores identificados en lo que a contextos de velocidad se refiere eran de dos tipos:

- Confundir la pendiente de una recta con su ordenada en el origen
- Dar el valor de la ordenada en el origen como valor de la pendiente de la recta.

Otros estudio que pone de manifiesto la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la compresión de la derivada, fue realizado por Zandieth (1997). En su artículo distingue dos tipos de conceptos: *procesos* y *objetos*.

Los procesos son operaciones sobre objetos previamente establecidos y así, el desarrollo del aprendizaje forma una cadena en la que, una vez afianzados, los procesos se convierten en objetos (reificación) sobre los que actuarán nuevos procesos. Teniendo en cuenta esto, sus estudios obtuvieron como resultado que los estudiantes presentaban dificultades para realizar la conexión entre los mismos procesos dados en contextos diferentes, poniendo de manifiesto la falta de comprensión global o completa del concepto.

C. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

C.1. Conocimientos previos necesarios para afrontar el aprendizaje

La derivada es uno de los conceptos clave del cálculo junto con la integral y es por ello por lo que es preciso que los alumnos dominen bastantes técnicas y tengan bien asentados ciertos conceptos que engloban varias ramas de las matemáticas como del cálculo mismo, del álgebra o de la geometría. Para la presente propuesta es necesario que los alumnos tengan más o menos afianzados los conceptos y habilidades relativos a los siguientes bloques.

- **Geometría**
    - Tangente trigonométrica de un ángulo como cociente entre catetos de un triángulo rectángulo.
    - Concepto de rectas secante y tangente a una curva.
    - Significado de sus parámetros *m* y *n* en la ecuación explícita de una recta.
    - Hallar ecuación de una recta dados dos puntos o dados un punto y la pendiente.
    - Representar una recta dada su ecuación.
- **Cálculo**
    - Concepto de función como una relación entre dos conjuntos de números.
    - Nociones básicas de representación de funciones. Dada una gráfica, saber determinar dominio, crecimiento, asíntotas, extremos relativos, etc.

    - Resolución de límites con indeterminación de tipo cero entre cero.
- **Álgebra**
    - Resolución de ecuaciones polinómicas.
    - Operaciones con polinomios.
    - Manipulación de expresiones algebraicas.
- **Física**
    - Conceptos de velocidad media y velocidad instantánea.

C.2. Conocimientos previos proporcionados por la enseñanza anterior.

La enseñanza anterior corresponde al cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, por lo que para saber si los conocimientos previos han sido tratados, se debe atender el currículo contemplado en la **ORDEN ECD/489/2016**, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón incluido en el BOA de 02/06/2016. Concretamente, la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas contiene, en distintos bloques, los siguientes **estándares de aprendizaje**.

- **Geometría**
    - **Est.MAAC.3.2.2.** Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
    - **Est.MAAC.3.3.3.** Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.
    - **Est.MAAC.3.3.4.** Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.
    - **Est.MAAC.3.3.5.** Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta […].
- **Funciones**

- **Est.MAAC.4.1.1.** Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
- **Est.MAAC.4.1.2.** Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
- **Est.MAAC.4.1.3.** Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.
- **Est.MAAC.4.1.5.** Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
- **Est.MAAC.4.2.3.** Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica […].

- **Álgebra**
  - **Est.MAAC.2.3.1.** Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
  - **Est.MAAC.2.3.2.** Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado.
  - **Est.MAAC.2.3.3.** Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas.

Para el caso de las velocidades, es muy asumible que la gran mayoría de los alumnos que cursan la modalidad de ciencias de bachillerato hayan cursado en el curso anterior la asignatura de Física y Química. En el currículo de dicha asignatura se contempla el siguiente estándar de aprendizaje:

- **Est.FQ.4.2.2.** Justifica la insuficiencia del valor medio de la velocidad en un estudio cualitativo del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A), razonando el concepto de velocidad instantánea.

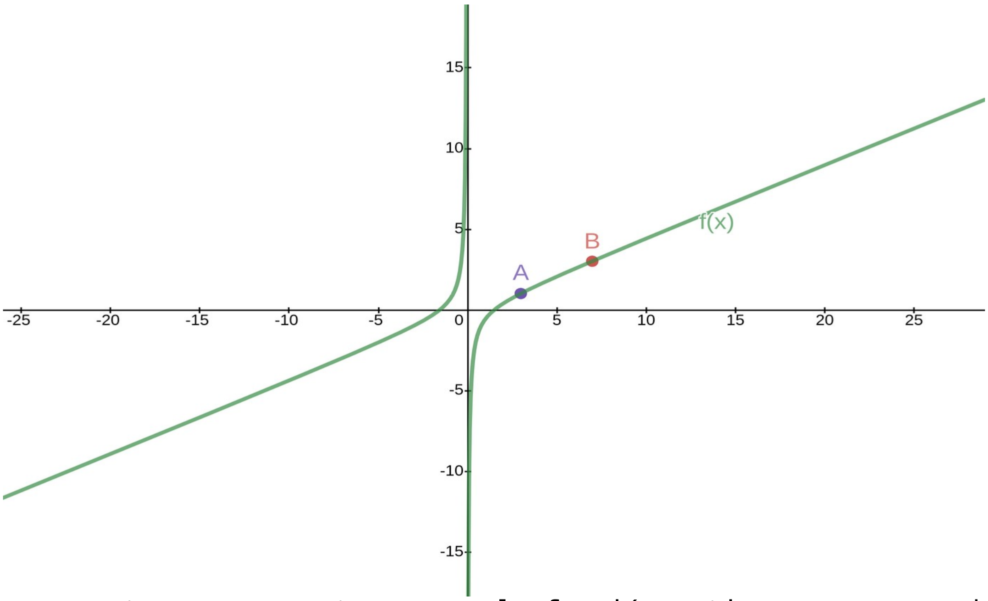
Como se puede ver, la enseñanza en los anteriores cursos ha tenido que garantizar la mayoría de los contenidos previos necesarios para poder afrontar la derivada.

Para el caso del cálculo de límites, el contenido se encuentra incluido en el currículo de primero de bachillerato y por tanto, es imprescindible que ese tema haya sido dado antes en ese mismo curso.

C.3. Actividades para asegurar la posesión de los conocimientos previos.

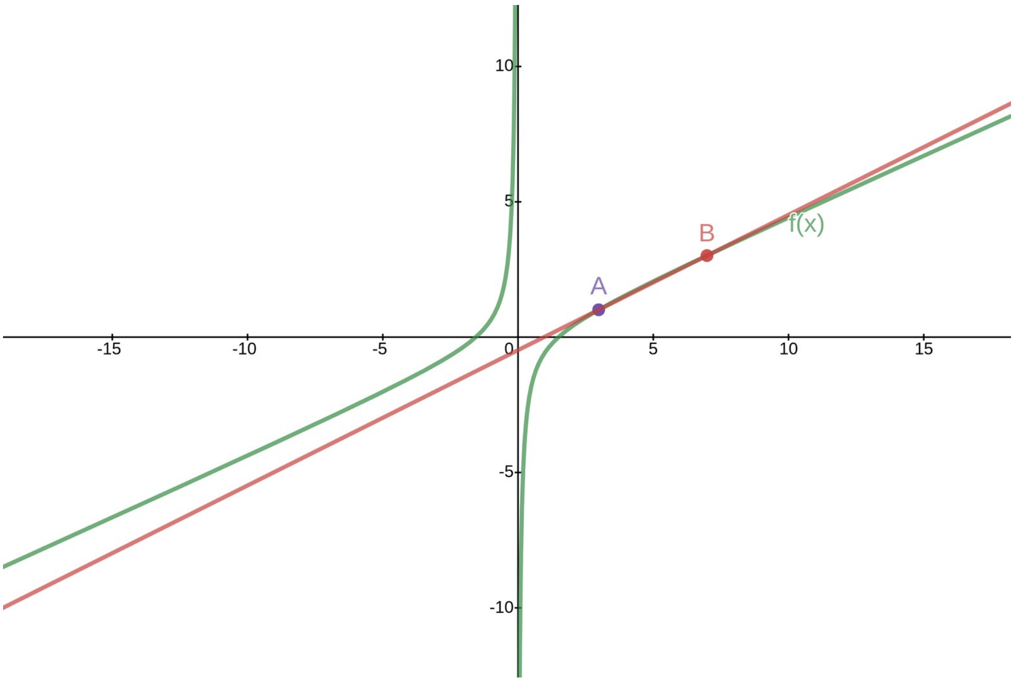
Para asegurar que los conocimientos previos están adquiridos, se planteará realizar el siguiente ejercicio. En concreto, se tratará de comprobar los conocimientos relativos a la **tasa de variación media**, **pendiente** de una recta y **tangente** trigonométrica de un ángulo.

Problema CP: La función que se encuentra dibujada en la siguiente figura tiene como expresión: $f(x)=\frac{9x}{20}+\frac{21}{20x}$



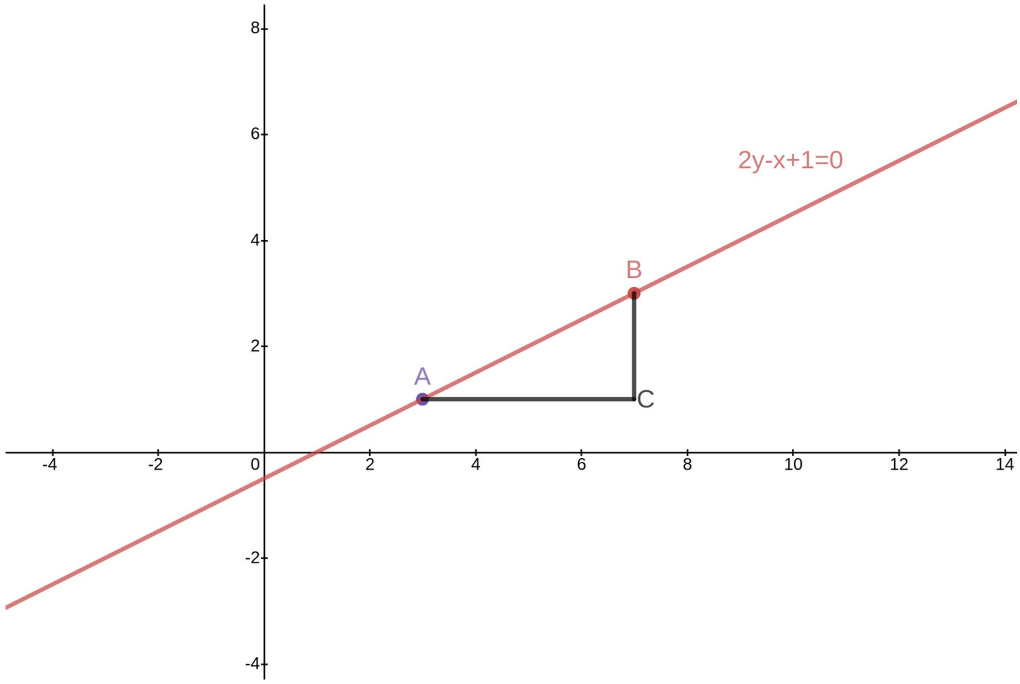
Los puntos A y B pertenecen a la función y tienen como coordenada $x_a=3$ y $x_b=7$ respectivamente:

a) Halla la tasa de variación media en el intervalo comprendido entre los puntos A y B, es decir: TVM[3,7].



b) Encuentra la expresión de recta que pasa por A y por B.

c) Calcula la pendiente de dicha recta.



d) ¿Cuál es el valor de la tangente (trigonométrica) del ángulo BAC?

e) ¿Qué relación encuentras entre todas las magnitudes que has calculado?

Con el problema anterior, además de asegurar que se poseen los conocimientos previos necesarios para abordar el aprendizaje de la derivada, se pretende ir guiando al alumno hacia el descubrimiento de la relación que existe entre los conceptos de los que se quiere comprobar la posesión.

D. RAZONES DE SER DE LA DERIVADA

D.1. Razones de ser históricas de la derivada.

Para tener en cuenta las razones de ser históricas de la derivada, Pino, Godino y Font (2011) realizan un detallado estudio sobre la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático. El estudio se centra en la idea de que la mejor enseñanza requiere que el profesor posea una amplia trama de conocimientos sobre el contenido a enseñar. En él también se repasan los distintos tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos asociados con el concepto de derivada. Desde el modelo teórico desarrollado en los trabajos de Godino conocido como enfoque "Onto-Semiótico", a cada tipo de problema se le asocia la noción de **configuración epistémica (CE)**. Una de las formas de entender el significado de un concepto es desde el punto de vista práctico (significado sistémico) donde se puede distinguir distintos significados cuando se abordan distintos problemas diferentes.

En su trabajo, Pino et al. (2011) encuentran nueve subsistemas de prácticas asociadas a cada CE a las que se les ha indexado con un número considerando un orden cronológico, así CE_1 será la más antigua. De este modo, las seis primeras se las asocia a sistemas de prácticas denominados "primarios" y tienen un carácter extensivo, dirigidos a resolver problemas determinados, con métodos y procedimientos particulares. Las 3 últimas, a partir de Newton y Leibnitz, generan un nuevo sistema de prácticas de carácter formal y más intensivo o general. Los sistemas de prácticas "primarios" se asocian a su vez en tres problemas más genéricos: cálculo de tangentes; máximos y mínimos; y variaciones (velocidades).

En cuanto a las configuraciones epistémicas primarias asociadas al **cálculo de tangentes**, se describen las siguientes:

- **CE1 – La tangente en la matemática griega.** El problema propuesto y resuelto por **Euclides** consiste en trazar desde un punto dado la tangente a una circunferencia dada. Su resolución utiliza lenguaje y argumentación propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones utilizadas por los griegos de la época antigua.

- **CE3 – Métodos algebraicos para hallar tangentes.** Los métodos paradigmáticos de esta configuración son los desarrollados principalmente por **Descartes**, **Hudde** y **Sluse** para el cálculo de tangentes, normales o subnormales. El lenguaje (así como los procedimientos utilizados, los argumentos y las proposiciones) se traduce del netamente geométrico al propio de la geometría analítica y del álgebra, para resolver así el problema mediante ecuaciones.

- **CE6 – Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes.** Las soluciones propuestas por **Barrow** al problema de las tangentes comienza a obtener la idea intuitiva de límite, con su concepción de recta tangente como la posición límite de la secante cuando los dos puntos de corte se aproximan hasta ser el mismo. Los argumentos y el lenguaje de esta configuración siguen siendo algebraicos pero con consideraciones infinitesimales, al suprimir potencias mayores de uno de variables por ser “infinitamente pequeñas”.

El estudio de la **variación** se ha dedicado principalmente al cálculo de velocidades. Las configuraciones epistémicas asociadas a estos problemas son las siguientes:

- **CE2 – Sobre la variación en la edad media.** Los primeros estudios sobre el movimiento comienzan durante el siglo XIV principalmente por **Oresme**. En ellos se utiliza la idea de que un movimiento uniformemente variado, con velocidades inicial y final conocidas, es equivalente (tarda el mismo tiempo) a un movimiento uniforme con cuya velocidad es igual al promedio de la inicial y final. Además, para su demostración, se apoya en la representación geométrica comparando el área de un trapezoide (movimiento variado) con la de un rectángulo (movimiento uniforme).

- **CE5 – Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes.** De las ideas de la configuración anterior, **Galileo** establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil e introduce la idea de que la velocidad instantánea tiene la dirección de la tangente a la trayectoria. En esta concepción se siguen abordando problemas de trazado de tangentes pero existen cambios conceptuales en los métodos, definiciones, proposiciones y argumentos.

Por último y no menos importante, en cuanto a los primarios, encontramos el problema del **cálculo de máximos y mínimos**. Para este tipo de problema encontramos una única configuración epistémica.

- **CE6– Ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos.** Los primeros métodos generales para la determinación de extremos, se deben a **Fermat**. El lenguaje utilizado por Fermat es prácticamente el mismo que el utilizado en las anteriores. Pero su propiedad principal, está en la idea de incrementar una magnitud a la variable independiente y se empiezan a elaborar argumentaciones basadas en cantidades infinitesimales. Al tratarse de métodos más generales para la resolución de problemas, esta configuración obtiene un carácter más intensivo que las anteriores.

En el siguiente nivel de sistemas de prácticas, que se podría llamar "secundario", tenemos las configuraciones epistémicas desarrolladas por los artífices del concepto de derivada: Newton y Leibnitz.

- **CE7 – Cálculo de fluxiones.** Apoyándose en la configuración subyacente al sistema genérico del estudio de las variaciones o velocidades, **Newton** desarrolla un nuevo sistema de prácticas teniendo en cuenta a la derivada como una fluxión. Al surgir de la idea del estudio del movimiento, Newton considera las curvas geométricas desde un punto de vista dinámico, como si fueran trayectorias de un objeto móvil que se desplaza sobre ellas, permitiéndole calcular la tangente como la dirección de su velocidad. Se trata por tanto de una configuración más general de tal forma que puede ser luego aplicada para resolver problemas de las otras configuraciones.

- **CE8 – El cálculo de las diferencias.** Por otro lado, la configuración debida a **Leibnitz** surge de afrontar los problemas sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión. Introduce el concepto de diferencial de una variable como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos. Al él le debemos la mayor parte de los símbolos utilizados en el cálculo diferencial (también le debemos esta expresión). A diferencia de Newton, Leibnitz concibe una curva como un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal.

Los métodos desarrollados por Newton y Leibnitz fueron los métodos generales que se fueron aplicando y desarrollando durante los siglos siguientes. Tal desarrollo fue encaminado para dar una fundamentación matemática más rigurosa llegando a una configuración fuertemente formal.

- **CE9 – La derivada como límite.** Esta configuración corresponde a la definición que conocemos en la actualidad. Los conceptos y definiciones que se desarrollan en esta etapa son primordiales no sólo para el concepto de derivada si no para el cálculo infinitesimal en general. Por ejemplo, el concepto de función debido a **Euler**, la evolución del concepto de límite trabajado por **Lhuilier**, **Cauchy**, y **Weierstrass**, introduciendo las definiciones con épsilon y delta. Finalmente, en el primer cuarto de siglo se obtiene la definición de derivada de una función que conocemos hasta ahora.

El estudio se centra en la evolución histórica de la derivada de una función real en una sola variable y, puesto que el presente trabajo tampoco excede dicho nivel, tan sólo se mencionará que existen muchas generalizaciones del concepto que se han ido desarrollando desde entonces y por tanto no se entrará en el detalle de éstas.

Debido a que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un objeto matemático concreto requiere de un estudio en profundidad sobre su significado, resulta de especial importancia el estudio y análisis resumido en los anteriores párrafos. Así, los resultados aportados por este estudio son el punto de partida para el diseño de los contenidos de la presente propuesta.

D.2. Razones de ser a tener en cuenta en la introducción escolar de la derivada.

Con respecto a la **derivada** de una función **en un punto** utilizando la definición, las razones de ser históricas de la modernidad, las correspondientes a las configuraciones epistémicas CE7 y CE8, parecen ser las más adecuadas para aplicar en la introducción de la derivada. Esto es, desde un punto de vista **geométrico**, el **cálculo de tangentes** y, desde un punto de vista **físico**, el cálculo de **velocidades instantáneas**.

En el caso de la **función derivada**, la razón de ser en un primer momento puede tener un carácter más pragmático. Hallar la derivada de una función en muchos puntos usando la definición puede llegar a resultar tedioso, situación que puede verse atajada con el cálculo de la función derivada y puede ser una buena razón para la introducción del concepto. Más adelante puede descubrirse que la función derivada permite realizar fácilmente el proceso contrario al de hallar la derivada en un punto conocido, esto es, hallar el punto (o puntos) que poseen una derivada concreta. Por último, lo anterior conecta directamente con la utilidad que tiene la función derivada para explorar las propiedades de una función: monotonía, extremos, curvatura a través de la segunda derivada, etc.

D.3. Problemas que se constituyen en razón de ser.

- **Problemas que se constituyen en razón de ser de la derivada en un punto**

Siempre es preferible que, el problema que crea la necesidad de "inventar" la derivada en un punto, posea una contextualización real para lograr la atención e implicación de los alumnos. En este caso se tratará de un problema en el que aparece un movimiento de velocidad variable en el que es importante conocer la velocidad instantánea en un momento determinado.

Problema RS1. Cierto tramo de autopista de unos 3 kilómetros de longitud (exactamente 2758 metros) tiene una limitación de velocidad de circulación de 105 km/h. A 1750 metros del comienzo del tramo, se encuentra un radar, el cuál se dispara al detectar un vehículo que circule a más de velocidad de la permitida. Al final del trayecto, un agente de policía de tráfico ha dado el alto a un conductor porque, al sobrepasar la posición del radar, éste ha enviado una señal de que su vehículo había sobrepasado la velocidad de 105 km/h. El agente, por tanto tiene la intención de sancionar al conductor.

El conductor, que quiere librarse de la sanción, posee un dispositivo de GPS que incluye una FUNCIÓN que le permite introducir una hora determinada y éste le dice exactamente en que punto del tramo se encontraba en esa hora. Usando esta función, el conductor alega que ha tardado 2 minutos y 20 segundos en recorrer los 2758 metros que tiene el tramo y que, por tanto, su velocidad no ha superado el límite permitido.

a) Calcula la velocidad media del coche durante todo el recorrido. ¿Supera esta velocidad media el límite permitido? ¿Crees que el argumento convencerá al agente? Justifica tu respuesta.

Puesto que con el anterior alegato no es capaz de convencer al agente, el conductor intenta otra estrategia: introduce en su GPS tiempos separados en intervalos de 20 segundos y escribe los resultados en la siguiente tabla.

Tiempo (s)	0	20	40	60	80	100	120	140
Posición (m)	0	118	328	678	1168	1750	2328	2758

b) Dibuja los puntos de la tabla en una gráfica espacio-tiempo y únelos mediante rectas.
c) Calcula la velocidad media en cada intervalo. Explica la relación que observas entre las velocidades medias en cada intervalo con la gráfica del apartado anterior.
d) ¿Ha superado la velocidad media del conductor el límite impuesto por el radar en algún tramo? ¿Crees que esta vez logrará convencer al agente? Justifica tu respuesta.

Acabada la paciencia del agente de tráfico, éste le pide al conductor que introduzca en el GPS el momento exacto en el que sobrepasa el radar y lo mismo para 10 segundos después, resultando que el coche se encontraba en la posición 2047,375 metros cuando habían pasado 110 segundos.

e) Sitúa el nuevo punto en la gráfica
f) Calcula la velocidad media en el intervalo de tiempo [100,110].
¿Supera esta vez la velocidad media el límite de 105 km/h?
¿Se puede asegurar que el velocímetro del coche ha superado en algún momento el límite?
¿Se puede asegurar que el velocímetro del coche marcaba más de 105 km/h en el momento de rebasar la posición del radar? Justifica tu respuesta.
g) ¿Se podría utilizar la función del GPS para saber exactamente (o de forma muy aproximada) lo que marcaba el velocímetro al sobrepasar el radar?

El problema hace uso del concepto de función como una “máquina” en la que se introduce un valor numérico y ésta ofrece otro de salida (*input – output*). Los alumnos ya tienen adquirida de cursos anteriores la idea intuitiva de lo que es la velocidad instantánea como el valor que marca el velocímetro de un coche. Se trata por tanto de construir el camino conceptual de ida y vuelta, que parte de esta idea intuitiva de velocidad instantánea hacia el concepto de velocidad media, para ir volver a la idea de que la velocidad instantánea coincide con la media cuando el intervalo es más y más pequeño. Además, al realizar una representación gráfica, el problema trata de acercar el concepto al sentido geométrico de la derivada como pendiente.

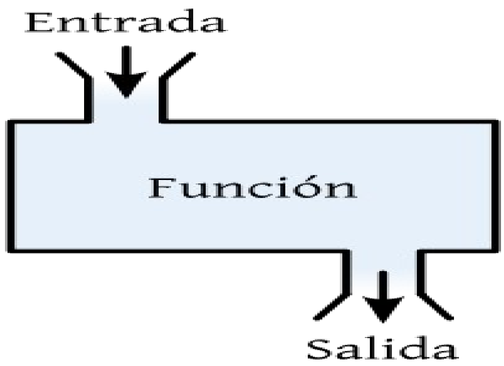


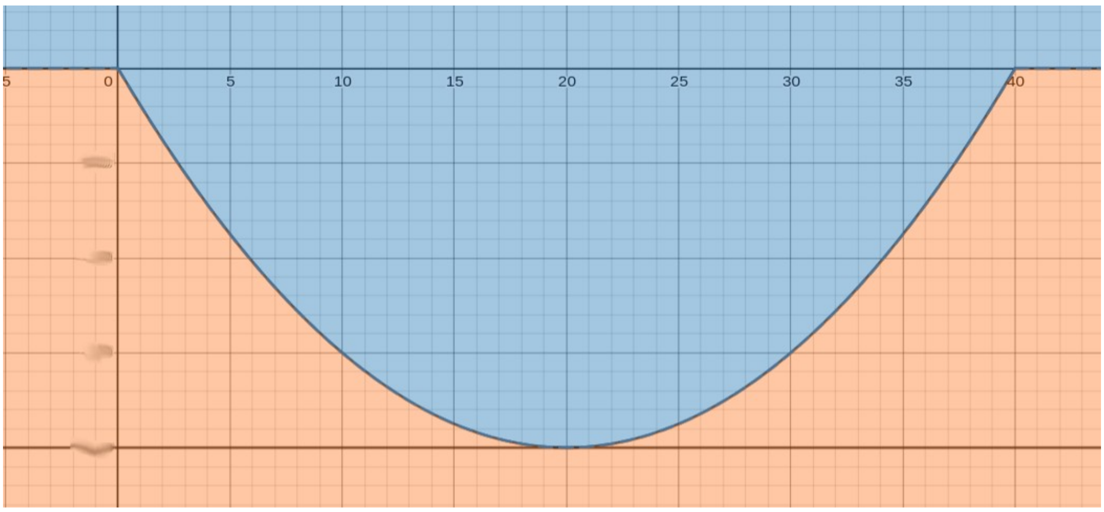
Figura 1. Concepto de una función como una máquina *input – output.*

La resolución del problema es bastante sencilla, no incluye técnicas nuevas ya que los alumnos ya saben calcular velocidades medias. Tal vez un enunciado tan largo pueda resultar algo confuso y por ello el problema está pensado para presentar a toda la clase acompañando de la explicación por parte del profesor que puede ayudarse de dibujos y esquemas en la pizarra para ayudar a su comprensión.

- **Problema que se constituye en razón de ser de la función derivada.**

Problema RS2. El perfil de un desfiladero producido por la erosión de un río tiene una forma muy similar a la de la función $f(x) = 1/2x^2 - 20x$ { $x \in [0,40]$ }.

a) Hallar el valor de la pendiente que se observa al asomarse al desfiladero (en el punto x = 0).
b) Averiguar en qué punto del desfiladero, la pendiente forma un ángulo de 45º con la horizontal.
c) Hallar la profundidad del cañón, tomando como referencia el punto en x=0. Resolver buscando el punto en el que la pendiente es nula. Comparar que el resultado coincide con el vértice de una parábola.



Representación del desfiladero. Los ejes no están en la misma escala.

Efectivamente, la estrategia ensayo-error de realizar el cálculo mediante la definición en varios puntos para encontrar el mínimo puede resultar largo y tedioso (y en ocasiones hasta inútil), mientras que el uso de la función derivada resulta mucho más eficiente en cualquier caso. El proceso mental que lleva a la necesidad de construir la función derivada es el habitual: se comienza aprendiendo a calcular la derivada en un punto de abscisa *a* dado y luego se pide calcular qué valor *a* debería tener la abscisa de un punto para un valor dado de la derivada en dicho punto.

E. CAMPO DE PROBLEMAS

E.1. Distintos tipos de problemas a presentar en el aula.

Los tipos de problemas que se abordarán en el aula, responden a los campos de problemas mencionados en la primera sección. Éstos se pueden clasificar en dos grupos. El primer grupo contiene a los campos de problemas del I al IV y será el referente a la derivada en un punto. Sus problemas se centrarán en tratar de hacer interiorizar el concepto a través de sus razones de ser, por lo que éste grupo de problemas también se podrá clasificar en otros grupos: tangentes y velocidades. El segundo grupo, de los campos V y VI, tratará la función derivada y de la relación entre las gráficas de una función con su derivada.

I. Cálculo de la tasa de variación media (o velocidad media).

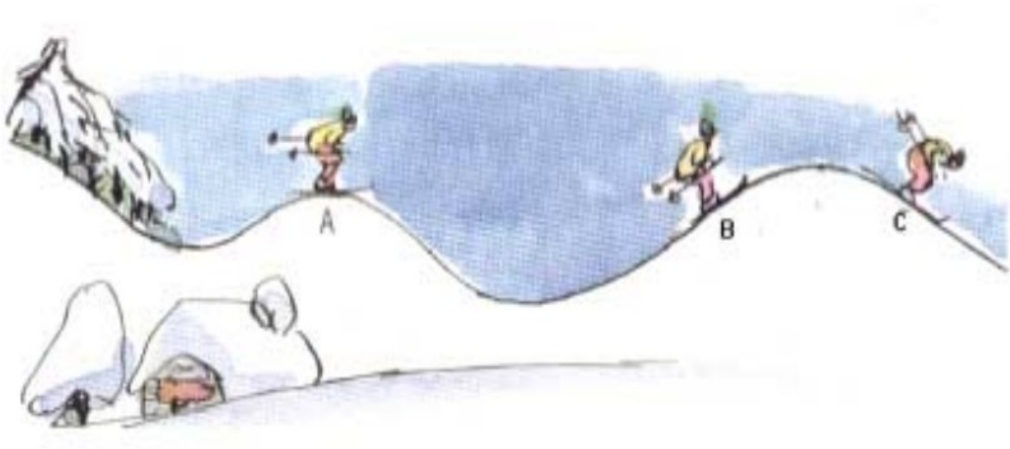
I.a. A partir de tabla de valores.

Problema 1. Aquí se utilizará la primera parte del problema del radar (problema RS1), apartados a, b, c y d del primer problema de la sección D.3.

I.b. A partir de gráfico.

Problema 2. (Obtenido de Font, 2000)

La ilustración siguiente nos muestra lo bien que se lo pasa un esquiador.



a) ¿En cuál de estos tres momentos le cuesta más esquiar? ¿Por qué?
b) Utiliza una regla y prolonga los esquíes en los puntos A, B y C. ¿Qué clase de recta se obtiene?
c) Si consideramos que el perfil de la montaña es la gráfica de una función, ¿cuál es el valor de la derivada de la función en A? ¿Qué signo tiene la derivada de la función en los puntos B y C?

A partir de aquí se institucionalizará el concepto de tasa de variación media y además, los problemas anteriores han creado la necesidad de inventar algo nuevo al preguntar por la velocidad instantánea o por la pendiente en un punto una curva.

II. Cálculo de tasa de variación instantánea (o velocidad instantánea).

II.a. Por aproximación tomando amplitudes cada vez menores.

Problema 3. El conductor del primer problema quiere saber qué velocidad exacta llevaba su vehículo cuando cruzaba el punto en el que se situaba el radar. Para ello decide utilizar la FUNCIÓN que le proporciona su GPS. Entonces descubre que el dispositivo, al que se le introduce un tiempo en segundos y éste devuelve una posición en metros, obedece a la función $f(x)=\frac{-x^4}{80000}+\frac{x^3}{400}+5x$, siendo x el tiempo en segundos transcurrido desde el comienzo del tramo.

a) Comprueba que para un tiempo de 100 segundos, el vehículo se encontraba justo sobrepasando el radar, es decir, que f(100)=1750.

b) Completa las siguientes tablas:

x	105	101	100,1	100,01	100
f(x)	1899,68	1779,99	1752,99	1750,30	1750
f(x) - f(100)	149,67	29,99	2,999	0,2999	0
x-100	5	1	0,1	0,01	0
$\frac{f(x)-f(100)}{x-100}$	29,93	29,99	29,9999	29,9999997	$\frac{0}{0} \rightarrow \nexists$

x	95	99	99,9	99,99	100
f(x)	1600,30	1720,00	1747,00	1749,7	1750
f(x) - f(100)	-149,69	-29,99	-2,99	-0,2999	0
x-100	-5	-1	-0,1	-0,01	0
$\frac{f(x)-f(100)}{x-100}$	29,93	29,99	29,9999	29,9999997	$\frac{0}{0} \rightarrow \nexists$

c) Los valores de la última fila corresponden a las velocidades medias medidas en m/s, ¿a qué valor se van aproximando? ¿Cuánto es ese valor en km/h?

En la tabla, se muestran en rojo los resultados del problema.

II.b. Usando la definición con el límite.

Problema 4. En el problema anterior hemos visto que cuanto más pequeño es el intervalo de tiempo, más se aproxima la velocidad media a un valor fijo. Pero, si intentamos calcularla con un intervalo de cero segundos, entonces aparece un cero en el denominador y no podemos calcularla. Por suerte, en el tema anterior aprendimos a manejar una herramienta que nos va a ser muy útil ahora: el límite.

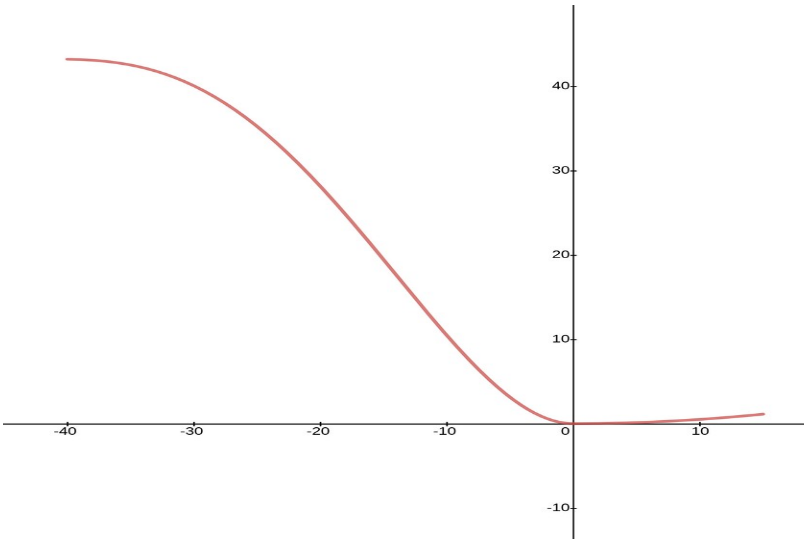
a) En primer lugar, hallar una expresión que represente la velocidad media del coche en el intervalo [100 , 100 + h]

b) Ahora, halla el límite de la expresión anterior cuando h tiende a cero.

El problema anterior sirve para ilustrar, mediante el ejemplo del coche que se ha ido utilizando en las sesiones anteriores, la razón de ser de la derivada en un punto. Pero debido a que la función es un tanto complicada, resulta conveniente no utilizar este problema para la introducción del concepto sino más bien como un ejercicio para consolidar el aprendizaje.

III. Cálculo de la pendiente de una función (derivada en un punto).

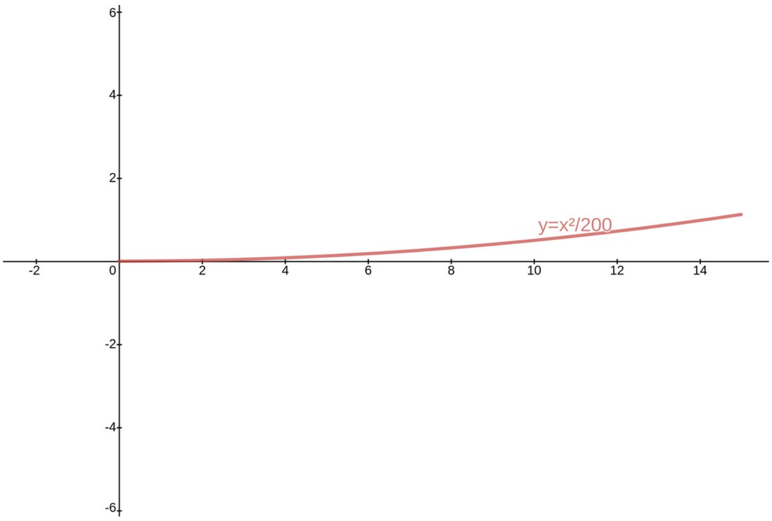
Problema 5. El perfil de un tobogán acuático viene representado en la siguiente figura:



El primer tramo del tobogán, hasta el punto x=0, sirve para que el atrevido saltador adquiera energía cinética y, por tanto, también velocidad.

Pero en este problema nos interesaremos por el segundo tramo, el que empieza a partir del punto x=0. Esta parte es el trampolín y tiene como finalidad la de orientar al saltador con un ángulo que le permita realizar un gran salto.

En la figura anterior puede parecer que el trampolín consiste en un pequeño plano inclinado dotado de una pequeña pendiente pero nada más lejos de la realidad. En la siguiente figura puede observarse el tramo con más detalle y constatar que se corresponde con la gráfica $y=\frac{x^2}{200}$, para valores entre x=0 y x=15:



a) ¿Cuál es la altura del trampolín?
b) Si se tratase de un plano inclinado de la misma longitud y altura, ¿cuál sería su pendiente?
c) ¿Cuál es la pendiente promedio del trampolín?

Calcula la pendiente promedio...
d) ... de los últimos 5 metros.
e) ... de los últimos 2 metros.
f) ... del último metro.
g) ... de los últimos 10 centímetros.

h) Encuentra una expresión algebraica que permita hallar la pendiente de los últimos h metros del trampolín.
i) ¿Cuál será el ángulo con respecto a la horizontal con el que saldrá despedido el saltador?

IV. Hallar la función derivada de funciones sencillas mediante la definición.

Este campo de problemas tiene una componente más procedimental y es habitual proponer ejercicios descontextualizados para practicar la técnica. No obstante, se puede usar el problema anterior para dotarlo de razón de ser.

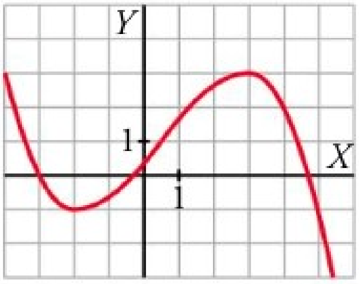
Problema 6. Para la función que modeliza el trampolín en el problema anterior del tobogán acuático, encontrar una función que nos ofrezca como resultado la pendiente del trampolín en función de la coordenada x.

V. Problemas de relacionar la gráfica de la función derivada con la gráfica de una función.

Este campo de problemas es muy interesante y también muy común en los libros de texto. Una propuesta interesante la encontramos en en la edición de ANAYA analizada en la primera parte del presente trabajo:

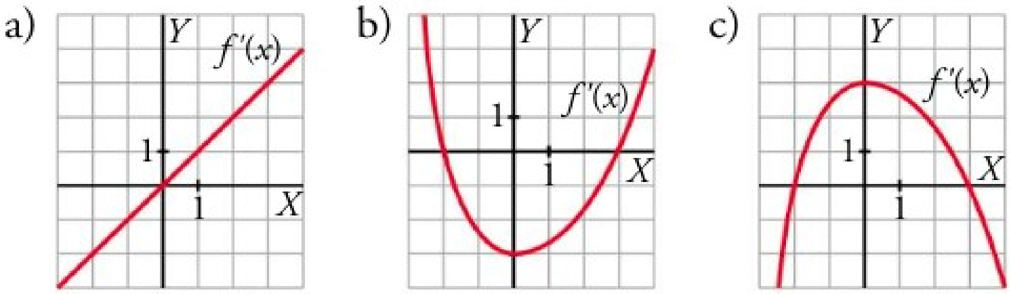
Problema 7.

81

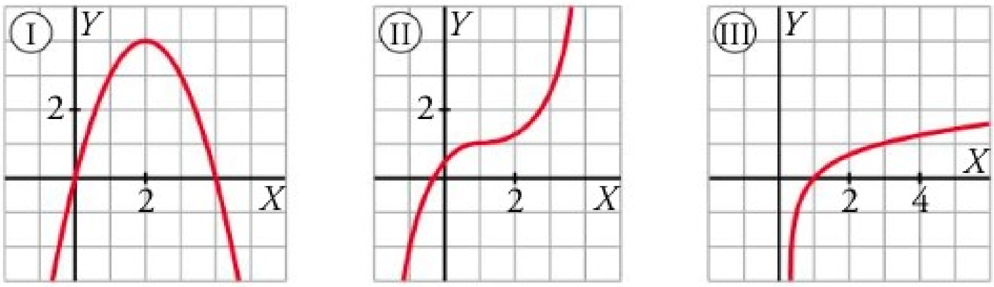


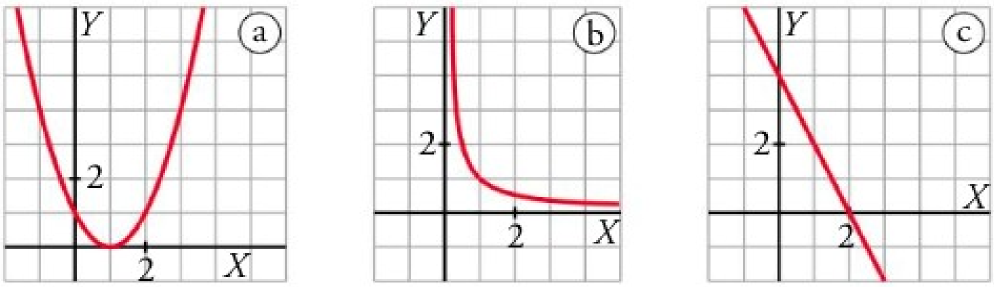
Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.

¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:



82 Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.





E.2. Modificación de la técnica inicial exigida por la resolución de problemas.

El aprendizaje del concepto de derivada supone un salto epistemológico importante. Sin embargo, en lo que respecta a la resolución de problemas, no hay una gran modificación de las técnicas a utilizar. A continuación se muestra un resumen de las técnicas y de sus modificaciones para cada campo de problemas.

I. Cálculo de la tasa de variación media (o velocidad media).

En este campo de problemas, lo normal es que el alumno aplique la fórmula de la velocidad como el espacio recorrido entre el tiempo transcurrido. La técnica es la misma que han utilizado en cursos anteriores: obtención de valores a partir de gráficas, tablas o expresiones y realizar la división.

II. Cálculo de tasa de variación instantánea (o velocidad instantánea).

En este momento, la técnica evoluciona desde hallar el cociente de incrementos cada vez más cortos, hacia la obtención de una expresión que dependa de un parámetro h a la que luego se aplicará el límite cuando h tiende a cero. Aunque la técnica de hallar el límite haya sido aprendida en el tema anterior, en este tema se considera ya como aprendida y por tanto no será una técnica nueva o que haya que modificar.

III. Cálculo de la pendiente de una función (derivada en un punto).

En este campo de problemas, la técnica es exactamente la misma que el apartado anterior.

IV. Hallar la función derivada de funciones sencillas mediante la definición.

Una vez se llega a este punto del proceso de aprendizaje, la aplicación directa de la fórmula se convierte en la técnica a utilizar en este tipo de problemas. Es muy importante hacer todo lo posible para que los alumnos comprendan con la máxima profundidad el significado de la derivada en su definición, ya que se trata de una fórmula bastante fácil de olvidar si no se entiende bien. Este efecto se incrementará más aún cuando en la siguiente etapa del aprendizaje se utilicen las tablas de fórmulas para hallar funciones derivadas.

V. Problemas de relacionar la gráfica de la función derivada con la gráfica de una función.

Este tipo de problemas no requieren de ninguna técnica de manipulación algebraica o de cálculo. Para su resolución se requiere que el alumno comprenda la relación que existe entre una función y su función derivada desde el punto de vista gráfico, teniendo en cuenta el crecimiento o decrecimiento, puntos singulares, etc.

F. TÉCNICAS

F.1. Distintos tipos de ejercicios a presentar en el aula

A continuación se presentan distintos tipos de técnicas para cada campo de problemas.

I. Cálculo de la tasa de variación media (o velocidad media).

En este campo de problemas, se proponen problemas que permitan ejercitar la técnica de cálculo de la tasa de variación media de funciones a partir de su representación gráfica, tabla de valores o por medio de su expresión algebraica.

II. Cálculo de tasa de variación instantánea (o velocidad instantánea).

Para la tasa de variación instantánea, se propone comenzar con ejercicios que utilizan la tabla de valores de intervalos cada vez más pequeños para entender el concepto. Una vez afianzado el concepto, la propuesta es introducir el parámetro h del que dependa la anchura del intervalo para seguidamente utilizar el límite. La resolución de estos límites de indeterminación cero entre cero, se realiza mediante la cancelación del parámetro h en numerador y denominador.

III. Cálculo de la pendiente de una función (derivada en un punto).

En este caso del cálculo de la derivada en un punto, se propone practicar la técnica mediante ejercicios de calcular la pendiente de funciones dadas mediante su expresión en un punto a también dado. Una vez dominada, el siguiente nivel de la técnica es, como viene siendo habitual, preguntar por el punto a que tendríamos que dar para que la derivada tuviera un valor determinado. Este razonamiento conduce directamente a la necesidad de crear el concepto de función derivada.

IV. Hallar la función derivada de funciones sencillas mediante la definición.

La técnica del apartado anterior ha de encaminar al alumno hacia la comprensión del concepto de función derivada. Una vez que el alumno domina la técnica de hallar la derivada de una función en un punto, se le propone considerar la abscisa del punto como una variable independiente (x) y obtener así, una vez simplificada, la expresión algebraica de una nueva función: la función derivada.

V. Problemas de relacionar la gráfica de la función derivada con la gráfica de una función.

La técnica en este campo de problemas consiste en identificar los intervalos de crecimiento o decrecimiento con el signo de la derivada y los puntos críticos con los puntos de derivada nula.

G. TECNOLOGÍAS

G.1. Razonamientos sobre los que se justifican las técnicas.

El razonamiento a seguir será el guiado por los problemas. La idea es introducir el concepto de derivada de una función a partir de sus razones de ser: como límite del cociente de incrementos en el caso de la velocidad y desde el punto de vista geométrico para el caso de la pendiente de la tangente.

El razonamiento comienza con la **tasa de variación**, ya que su cálculo ya es conocido por los alumnos. Para facilitar la comprensión se alude a la relación entre TVM y velocidad media. Al representar en una gráfica espacio-tiempo, se puede directamente argumentar que la TVM de un intervalo, desde un punto de vista geométrico, coincide con la pendiente de la secante que corta por los puntos que limitan el intervalo.

La justificación del cálculo formal de la **derivada en un punto** se realiza del mismo modo simultáneamente desde los dos puntos de vista. Se relaciona por un lado con el concepto de velocidad instantánea, como la velocidad media entre dos instantes de tiempo muy próximos, mientras que por otra parte se relaciona con la pendiente de una recta secante en la que ambos puntos de corte con la función se aproximan tanto que llegan a coincidir, confundiéndose aquella con la recta tangente.

Llegados a este punto resulta muy interesante mencionar la posibilidad de utilización de un software de representación gráfica que sea dinámico. En este sentido, la aplicación de navegador web *Desmos*[1] resulta muy interesante y útil dado sus prácticamente nulos requisitos (sólo necesita un navegador y conexión a internet) y su gran facilidad para compartir las creaciones mediante un simple enlace web.

1 https://www.desmos.com/calculator?lang=es

Para el caso de la **función derivada**, su justificación viene dada por su propia razón de ser.

G.2. Responsabilidad de la justificación.

La secuencia de problemas se diseña para que la justificación venga dada por sí misma dado que se van generando necesidades por los propios problemas. Se propone la resolución de los problemas de forma que las ideas y estrategias que vayan surgiendo se pongan en común, pero, una vez decidido el objetivo, la tarea se realiza de forma individual. De este modo la responsabilidad de la justificación recae en primer lugar en los alumnos. La figura del profesor vendrá en el momento de institucionalización del objeto, aunque también realiza una tarea de supervisión garantizando que el proceso de justificación de las técnicas sea adecuado sin dejar de incentivar el trabajo autónomo de los alumnos.

G.3. Proceso de institucionalización.

Una vez realizados los ejercicios de consolidación de las técnicas para cada uno de los campos de problemas, el proceso de institucionalización vendrá dado por la figura del profesor.

H. METODOLOGÍA.

En cuanto a la metodología utilizada, se propone adaptar los siguientes momentos de estudio a las fases en la estructura en el aula que se muestran en la figura:

1. Momento del primer encuentro.
2. Momento exploratorio.
3. Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico.
4. Momento del trabajo de la técnica.
5. Momento de institucionalización.
6. Momento de la evaluación.

Se trata de los momentos de estudio vistos durante el curso en la asignatura de Diseño Curricular e Instruccional de Matemáticas. En la figura se indica en qué etapa del proceso de aprendizaje del objeto matemático se asocia cada uno de los momentos de estudio.

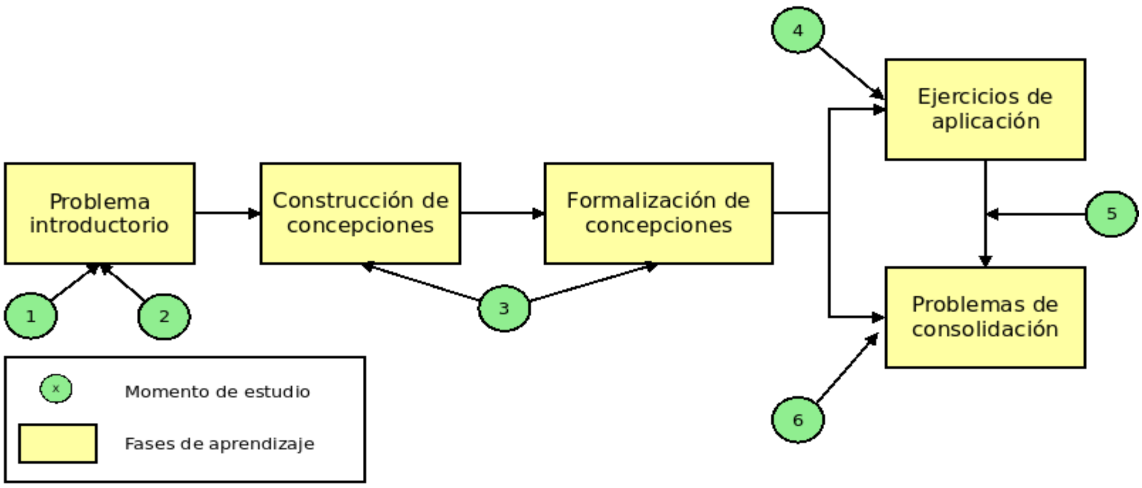


Figura 2. Momentos de estudio incluidos en las fases de aprendizaje.

Para cada uno de los campos de problemas, se proponen problemas introductorios que comiencen con apartados que soliciten tareas bien conocidas por los alumnos. Poco a poco el problema va solicitando nuevas tareas que van conduciendo a la necesidad de crear nuevas estrategias. En estos momentos de reflexión, las ideas deben fluir en una puesta en común en clase y en la que el profesor deberá tomar el menor partido posible. En función de cómo sea el grupo de alumnos, cuando el control de una puesta en común de todo el grupo pueda ser complicada, se puede proponer que el momento de reflexión o exploratorio pueda hacerse por grupos más pequeños y creados previamente por el profesor.

Posteriormente, para construcción y formalización de los conceptos será muy útil el uso de las TICs, con herramientas como *Desmos* o *Geogebra*.

Una vez se ha consolidado la técnica en cuestión, se da paso al momento de institucionalización por parte del profesor consiguiendo así que la tecnología que la justifica pase a formar parte de la colección de tecnologías matemáticas de la clase y podrá ser, a partir de entonces, utilizada para justificar nuevas técnicas.

I. SECUENCIA DIDÁCTICA Y CRONOGRAMA

La secuencia didáctica propuesta en este trabajo consistirá en diez sesiones de clase de aproximadamente una hora de duración. Su distribución será como sigue:

Sesión 1:

En la primera sesión se les repartirá a los alumnos el **problema CP** que permitirá realizar una primera exploración sobre la adquisición (o no) de los conocimientos previos. Tras un periodo de 20 minutos para la resolución de forma individual, se propone la puesta en común de los resultados. Finalmente se resuelve el problema para toda la clase. En función de como haya ido se propondrán problemas de repaso para su realización en casa.

Sesión 2:

En esta sesión se comienza por recordar brevemente el ejercicio que se realizó en la sesión anterior y, si procede, la corrección de las tareas pedidas. Seguidamente se abordará el **problema 1** que ocupará el resto de la sesión. Se pretende que al menos la primera parte quede resuelta al final de la sesión. Este problema trata de un primer acercamiento al concepto y es importante dejar tiempo a la reflexión y no considerarlo como un mero ejercicio.

Sesión 3:

En la siguiente sesión se continuará con el problema del coche y el radar. En la sesión anterior, a los alumnos se les hizo dibujar la gráfica espacio-tiempo del movimiento y se les instó a reflexionar sobre la relación entre la velocidad y la pendiente de aquella. Por ello, al terminar los apartados del primer problema y tras un periodo de reflexión y puesta en común, se propone el **problema 2** para que se vaya relacionando todo con el concepto de pendiente.

Sesión 4:

Lo siguiente a abordar es el acercamiento a la derivada en un punto mediante aproximaciones de intervalos cada vez más cortos. Para ello se vuelve a recurrir al problema del coche y el radar con su ampliación en el **problema 3**. Esto requerirá bastante tiempo pues tendrán que realizar bastantes cuentas que tendrán que ser realizadas con la calculadora. En este problema se realizan aproximaciones por ambos lados del eje X por lo que será el momento adecuado para introducir el concepto de derivada lateral.

Sesión 5:

Con el problema realizado el día anterior se llega a la conclusión de que la pendiente (velocidad) va adquiriendo valores concretos cuando los intervalos son cada vez más pequeños. Esto crea la necesidad de inventar una técnica nueva que permita calcular la velocidad instantánea y que se verá satisfecha al realizar el **problema 4**. Tras la resolución del problema, se propondrá como tarea para realizar en casa, varios problemas de cálculo de derivadas de función en puntos dados.

Sesión 6:

La sesión comienza con la corrección de los problemas de trabajo de la técnica. Una vez la constatación de que la técnica se ha consolidado, se procede con la institucionalización de la técnica de cálculo de la derivada en un punto a través del siguiente problema. El **problema 5** aborda el tema desde el punto de vista geométrico como pendiente de una función. Otra peculiaridad de este problema es que se pide calcular la pendiente en el extremo superior (más a la derecha) del intervalo, propiciando una ocasión perfecta para consolidar el concepto de derivada lateral, aunque ya se ha tratado en el problema 3.

Sesión 7:

El último problema será aprovechado para introducir el concepto de función derivada mediante su ampliación en el **problema 6**. Tras la realización de problemas de consolidación de hallar funciones derivadas de funciones polinómicas sencillas se propondrán más ejercicios para practicar en casa en los que se incluirá al **problema RS2** (desfiladero) como problema de ampliación, ya que incluye un grado de dificultad añadida con respecto lo que se ha visto hasta ahora.

Sesión 8:

La octava sesión se reservará para la reflexión sobre el comportamiento de las gráficas de las funciones derivadas y por su puesto sobre su relación con sus respectivas funciones primitivas. Para ello se realizará el **problema 7**.

Sesión 9:

La penúltima sesión se reservará para la consolidación e institucionalización de la derivada y para la demostración de la técnica de hallar funciones derivadas sin tener que usar la definición. El cálculo de funciones derivadas mediante el uso de tablas de derivadas se encuentra fuera del ámbito de este trabajo, por lo que esta última parte no entrará en la prueba de evaluación. Sin embargo, es un buen momento para despertar la curiosidad sobre derivadas de funciones más complicadas e ir preparando el terreno para el siguiente tema en el que sí tendrá que realizarse..

Sesión 10:

La última sesión se reserva para la prueba de evaluación que se muestra en el siguiente epígrafe.

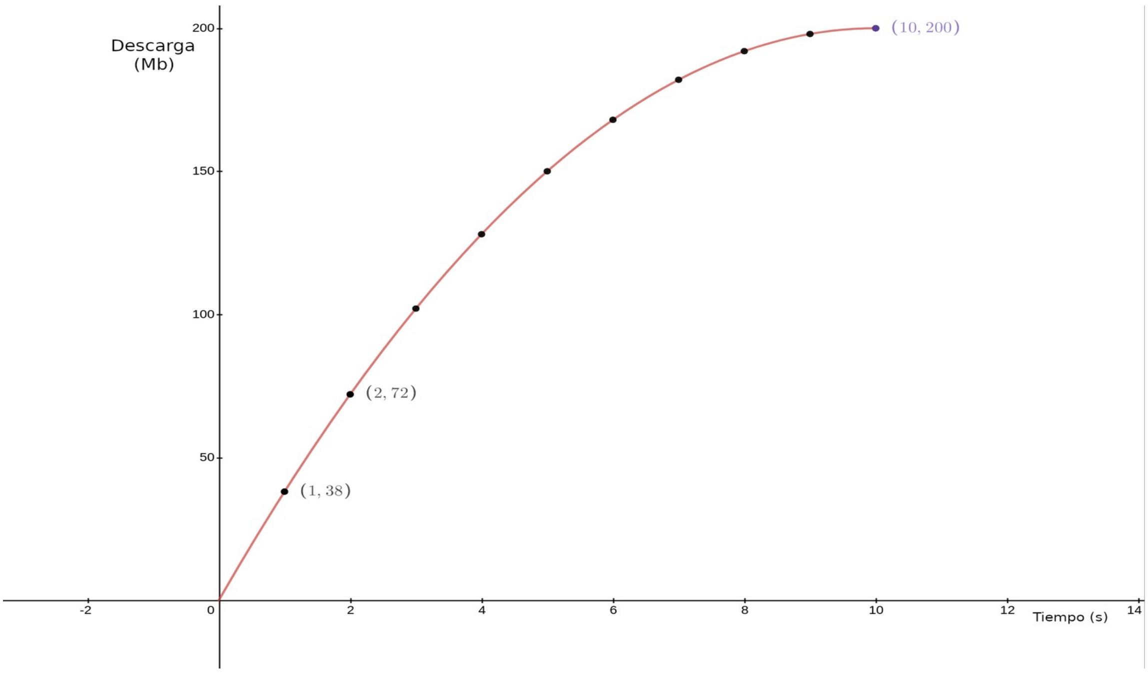
J. EVALUACIÓN

J.1.Prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos.

En la décima sesión del cronograma se realizará una prueba escrita que consistirá en la realización, de forma individual, de cinco problemas. El tiempo otorgado para su ejecución será de una hora. Los problemas serán los siguientes:

Problema EV1.

Un archivo de 200 Mb ha tardado 10 segundos en descargarse a mi dispositivo. Al anotar cada segundo los megas que se habían descargado del archivo y colocar los datos en una gráfica, ha quedado una gráfica así:



a) ¿Cuál ha sido la velocidad media de descarga?

b) Calcula la velocidad media de descarga durante el primer segundo y durante los dos primeros segundos.

c) Halla la TVM[1,2]

d) Según se puede observar en el gráfico, ¿cuándo ha sido mayor la velocidad, en la primera o en la segunda mitad de la descarga? Justifica la respuesta.

Problema EV2.

La función que describe la cantidad de Mb descargados del archivo del problema anterior puede describirse así: $f(x)=-2x^2+40x$, donde $0 \leq x \leq 10$ representa el tiempo en segundos y $f(x)$ representa la cantidad de Mb descargados transcurrido un tiempo x.

a) Calcula la velocidad instantánea transcurrido 1 segundo del movimiento.

b) ¿Con qué velocidad se ha finalizado la descarga a los 10 segundos?

Problema EV3.

Dada la función $f(x)=3x^3+2x^2-5x$,

a) Halla la ecuación de las rectas tangentes a la función en los puntos $x=-1$ y $x=0$.

Problema EV4.

Utilizando la definición, halla la función derivada de las siguientes funciones:

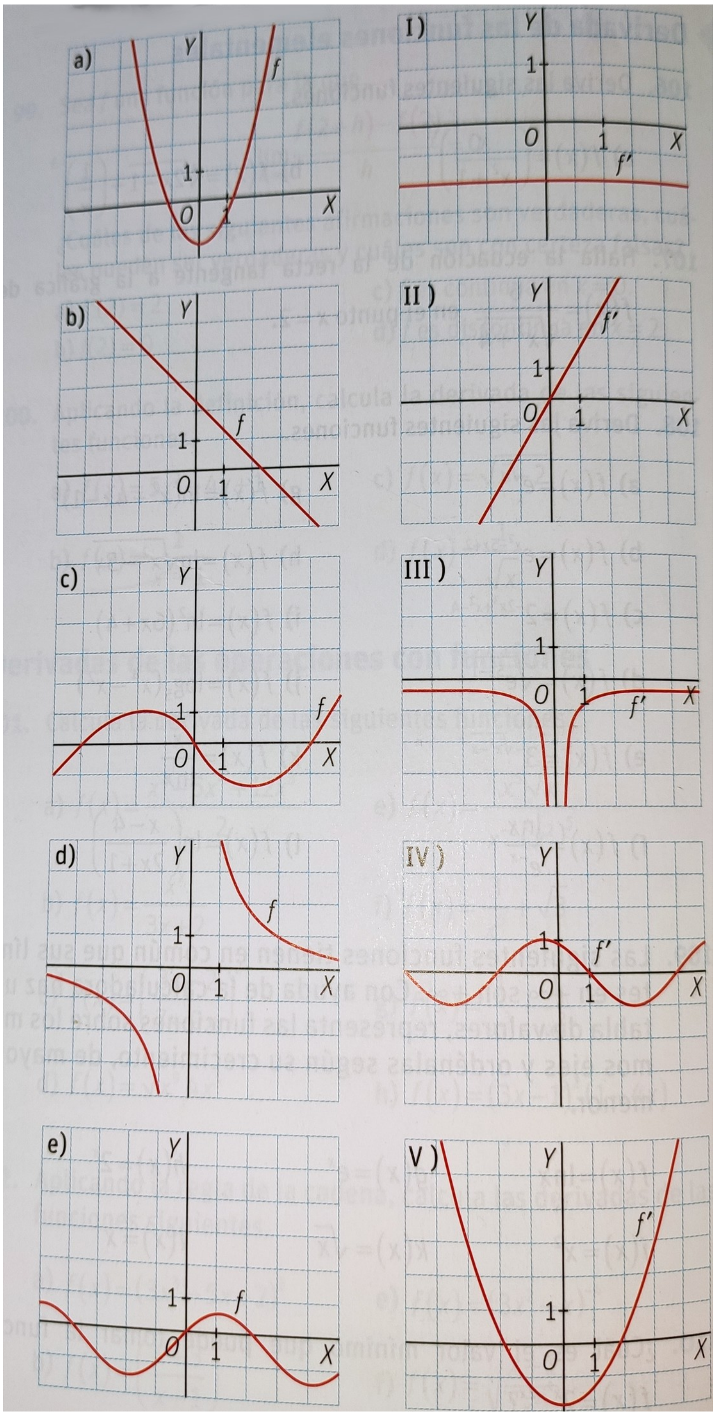
a) $f(x)= \sqrt{x+3}$

b) $g(x)= \dfrac{-1}{x^2}$

c) Utiliza los resultados anteriores para hallar $f'(1)$ y $g'(2)$

Problema EV5. (SM)

Empareja cada una de las gráficas de la izquierda con las gráficas de sus correspondientes derivadas situadas a la derecha.



J.2.Aspectos del conocimiento que se pretenden evaluar

Problema EV1.

Relacionar la velocidad media con la tasa de variación media y calcularla utilizando su fórmula. Interpretar la pendiente en una gráfica como la velocidad.

Problema EV2.

Relacionar la velocidad instantánea con la tasa de variación instantánea y calcularla usando la definición. Diferenciarla de la tasa de variación media distinguiendo cuando se pide calcular cada una.

Problema EV3.

Relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente a una curva y utilizar ese dato para hallar la ecuación de ésta.

Problema EV4.

Hallar la función derivada de otra utilizando su definición

Problema EV5.

Interpretar la función derivada como una nueva función diferente que aporta información sobre el crecimiento o pendiente de su función primitiva.

J.3.Respuestas esperadas

Problema EV1.

a) $TVM[0,20]=\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{200-0}{10}=20\,Mb/s$

b) $TVM[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{38-0}{1}=38\,Mb/s$

$TVM[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{72-0}{2}=36\,Mb/s$

c) $TVM[1,2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{72-38}{1}=34\,Mb/s$

d) La pendiente es es mayor en la primera mitad del tramo en el gráfico, por lo tanto la velocidad de descarga es mayor en la primera mitad.

Problema EV2.

$$a)\quad f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2(1+h)^2+40(1+h)-38}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2+36h}{h}=36\,Mb/s$$

$$b)\quad f'(10)=\lim_{h\to 0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2(10+h)^2+40(10+h)-200}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2}{h}=0\,Mb/s$$

Problema EV3.

Primero hallamos la función derivada: $f'(x)=9x^2+4x-5$

- En x=-1

  $f(-1)=4$ ………→ $P(-1,4)$

  $f'(-1)=0$ ………→ $m=0$

  Por tanto la recta buscada es:

  r: y=4

- En x=0

  $f(0)=0$ ………→ $P(0,0)$

  $f'(0)=-5$ ………→ $m=-5$

  Por tanto la recta buscada es:

  s: y=-5x

Problema EV4.

a) $f(x)=\sqrt{x+3}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+3-x-3}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

b) $g(x)=\frac{-1}{x^2}$

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2}-\frac{-1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2+x^2+2xh+h^2}{h(x+h)^2x^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}=\frac{2}{x^3}$$

Problema EV5.

La relación primitiva-derivada entre ambas columnas de gráficas es:

a) $\longrightarrow$ II)

b) $\longrightarrow$ I)

c) $\longrightarrow$ V)

d) $\longrightarrow$ III)

e) $\longrightarrow$ IV)

J.4.Criterios de calificación

Como criterio de calificación se propone un modelo penalización de errores de tercios (Gairín, Muñoz y Oller, 2012). Éste consiste en distinguir entre distintos tipos de tarea en cada problema:

Tareas principales: Son aquellas que son objetivo principal de la calificación y valoran la comprensión sobre los contenidos propios del curso y del tema. En el caso que nos ocupa, son tareas principales todas las relacionadas directamente con las tecnologías que aparecen en los campos de problemas propuestos: tasas de variación, derivada en un punto y función derivada. Los errores cometidos en la realización de estas tareas puede suponer la pérdida de toda la puntuación en el problema (o apartado). Sin embargo su correcta realización asegura un tercio de la puntuación aunque en el problema no se halle la solución correcta.

Tareas auxiliares específicas: son las relacionadas con los contenidos matemáticos propios del curso pero que juegan únicamente un papel instrumental en el problema. Inequívocamente son tareas auxiliares en este tema la resolución de límites, aunque en esta propuesta de introducción no resultan ser especialmente complicados. Este tipo de tareas tiene asignado otro tercio de la puntuación del problema (o apartado), por lo que su correcta realización asegura dos tercios de la puntuación total, siempre que la tarea principar se encuentre igualmente correcta.

Tareas auxiliares generales: El último tercio de la calificación corresponde a este tipo de tareas. Son de igual modo aquellas que juegan un papel instrumental pero se corresponden con contenidos vistos por el alumno en cursos anteriores. Los errores en este tipo de tareas supondrán la pérdida de, como máximo, un tercio del valor del problema (o apartado) al que pertenecen.

Figura 3. Modelo de calificación por penalización de errores por tercios. (Gairín et al., 2012)

K. BIBLIOGRAFÍA

Alcaide F., Hernández J., Serrano E., Barbero J.F., Sanz L. (2015). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato.* Madrid: SM.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Bogotá, Colombia. Grupo Editorial Iberoamerica.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. (Tesis de doctorado), Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R., & Santaella, E. (2015). *Matemáticas I: Bachillerato 1*. Madrid, España: Anaya.

Font, V. (2000) Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x): el caso de la función seno. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas.* 25, 21-40

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 2005-01-01, pp. 111-128.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *18*, pp. 15-28.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática 16* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta. 47*(4), 449-462.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (2016). (02), 819.

ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (2016). (03), 929.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics 14* (3), 235–250

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13* (1).

Ruiz M.J., Llorente J., González C., Aparicio A.M., Arribas F. (2015) *Matemáticas I de 1º de Bachillerato*. Madrid, España: Editex.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11* (2), 267-296.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*. 28. 449-468. 10.1590/1980-4415v28n48a22.

Zandieth, M. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivate*. (Tesis de doctorado), Oregon State University, USA.